ref : cours Nicoleau

Developpement :

Transformée de Fourier de la gaussienne complexe :

leçon 236
250
245
239

Considérons la transformée de Fourier de la gaussienne complexe

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi} \, e^{-z\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$\hat{f}(t) = e^{-z\frac{t^2}{2}}$

définie sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \, ; \, Re(z) > 0\}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

Théorème :

F est holomorphe sur Ω et vaut $F(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cdot e^{-\xi^2/2z}$

▶ F est holomorphe sur Ω :

- F est définie sur Ω :

$$\left| e^{-it\xi} \, e^{-z\, t^2/2} \right| = e^{-Re(z) \cdot \frac{t^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{car } Re(z) > 0.$$

- F holomorphe sur Ω : soit $f(t,z) = e^{-it\xi} e^{-z t^2/2}$
  - $t \mapsto f(t,z)$ mesurable
  - $z \mapsto f(t,z)$ holomorphe par holomorphie de l'exp
  - $|f(t,z)| = |e^{-it\xi} e^{-z t^2/2}| = |e^{-z t^2/2}| = e^{-Re(z) t^2/2} \leq \underbrace{e^{-a\frac{t^2}{2}}}_{\in L^1(\mathbb{R})}$

On a majoré $|f(t,z)|$ sur tout compact de Ω par une fonction intégrable.

Ainsi $F \in H(\Omega)$. rédac : Soit $K \subset \Omega$ compact, alors $\exists a > 0$ tq $\forall z \in K$, $Re(z) \geq a$

▶ Mq $F(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cdot e^{-\xi^2/2z} \quad \forall z \in \Omega$

le dire à l'oral

⚠ Remarque il y a une racine d'un nbre complexe ...
On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (ouvert étoilé) $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{i\frac{\arg(z)}{2}}$, $\arg(z) \in]-\pi, \pi[$.

Comme $z \mapsto \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \cdot e^{-\xi^2/2z} \in H(\Omega)$

et $z \mapsto F(z) \in H(\Omega)$

Nous pouvons utiliser le principe du prolongement analytique, c'est à dire qu'il suffit de montrer l'égalité sur un sous ensemble de Ω possédant un point d'accumulation : $\mathbb{R}^{+*} \subset \Omega$ et tout intervalle de $\mathbb{R}$ possède un point d'accumulation. Nous allons donc montrer

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \, e^{-\xi^2/2x}$$

Posons le changement de variable $x\frac{t^2}{2} = \frac{s^2}{2}$ (pour retrouver la TF de la gaussienne), $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot s}$

Ainsi $F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its} e^{-x t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-is(\xi/\sqrt{x})} \cdot e^{-s^2/2} ds}_{\text{TF de } s \mapsto e^{-s^2/2} \text{ au point } \xi/\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cdot e^{-\xi^2/2x}$$

On conclut par le principe de prolongement analytique.

Lemme : (lemme qui sert pour prouver l'application)
Soit $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. $\forall \mu \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ tq $(\mu, \lambda) \neq (0,0)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\mu+i\lambda)t^2/2} f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu+i\lambda)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/2(\mu+i\lambda)} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

preuve :

$\boxed{\text{si } \mu > 0}$ $\int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-(\mu+i\lambda)\frac{t^2}{2}}}_{\in L^2(\mathbb{R})} \underbrace{f(t)}_{\substack{\in L^2(\mathbb{R}) \\ \text{car } f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})}} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \overline{e^{-(\mu-i\lambda)t^2/2}}\, dt$

Plancherel $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{e^{-(\mu-i\lambda)s^2/2}}}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \overline{\sqrt{\frac{2\pi}{\mu-i\lambda}} \cdot e^{-\xi^2/2(\mu-i\lambda)}}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\mu+i\lambda)}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{-\xi^2/2(\mu+i\lambda)}\, d\xi$$

$\boxed{\text{Si } \mu = 0}$ Soit $(\mu_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{>0} 0$ alors $\int_{\mathbb{R}} e^{-(\mu_n+i\lambda)t^2/2} f(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t^2/2} f(t)\,dt$

par convergence dominée. On applique ensuite le résultat précédent à la première intégrale, et on passe à la limite.

Appli : Preuve de la méthode de Laplace ($\lambda = 0$, μ noté λ) et de la méthode de la phase stationnaire.

$\mu = 0$

On note $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t^2/2} f(t)\,dt$ et $J = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda \frac{t^2}{2}} f(t)\,dt$

méthode de Laplace approxime $\int_a^b e^{M} \cdot f(x)\,dx$

méthode de la phase stationnaire approxime $\int_a^b f(x)\, e^{i\lambda g(x)}\,dx$

On a par le lemme :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2/2\lambda} \hat{f}(\xi)\, d\xi \qquad \text{et} \qquad J = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2i\pi\lambda} e^{-\xi^2/2i\lambda} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

Appliquons la formule de Taylor reste intégrale à $\underbrace{t \mapsto e^t}_{\text{et bien } C^{n+1}}$ sur $[0,x]$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{N!} \int_0^x (x-t)^N e^t\, dt$$

$\} \; t = xs \; ; \; s = \frac{t}{x} \; ; \; dt = x\, ds$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{N+1}}{N!} \int_0^1 (1-s)^N e^{xs}\, ds$$

▶ Méthode de Laplace :

On a donc
$$e^{-\xi^2/2\lambda} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{\xi^{2k}}{(2\lambda)^k} + \underbrace{\frac{(-1)^{N+1}}{N!} \left(\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^{N+1} \int_0^1 (1-s)^N e^{-s\frac{\xi^2}{2\lambda}}\, ds}_{R_N(\lambda,\xi)}$$

et on injecte ceci dans I. (rappel : $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}) \to \hat{f} \in S(\mathbb{R})$).

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!\,(2\lambda)^k} \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} \hat{f}(\xi)\, d\xi + \int_{\mathbb{R}} R_N(\lambda,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi \right]$$

le reste

Or, $|R_N(\lambda,\xi)| \leq \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\lambda)^{N+1}} \xi^{2(N+1)} \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-s)^N ds}_{\leq \frac{1}{N+1}}$

d'où $\left| \int_{\mathbb{R}} R_N(\lambda,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi \right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{(2\lambda)^{N+1}} \cdot \int_{\mathbb{R}} \xi^{2(N+1)} \cdot |\hat{f}(\xi)|\, d\xi$

$$\leq \frac{C_{N,f}}{\lambda^{N+1}}$$

la 1ère intégrale

Par inversion de Fourier dans $S(\mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ et

$f \in S(\mathbb{R})$ donc $f \in C^\infty$ donc

comme $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$, on a* $f^{(2k)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (i\xi)^{2k} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$,

en particulier $f^{(2k)}(0) = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} \hat{f}(\xi)\, d\xi$ d'où :

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{2\pi}{k!\,(2\lambda)^k} f^{(2k)}(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] \quad \text{pour } \lambda \to +\infty$$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^{-k-\frac{1}{2}}}{k!\, 2^k} f^{(2k)}(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \quad \text{pour } \lambda \to +\infty$$

▶ Méthode de la phase stationnaire :

En reprenant l'expression de e^x, pour $x = i\xi^2/2\lambda$, on obtient

$$e^{i\xi^2/2\lambda} = \sum_{k=0}^{N} \frac{i^k}{k!} \frac{\xi^{2k}}{(2\lambda)^k} + R_N(\lambda,\xi) = \frac{i^{N+1}}{N!} \left(\frac{\xi^2}{2\lambda}\right)^{N+1} \int_0^1 (1-s)^N e^{is\xi^2/2\lambda}\, ds$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{2i\pi\lambda}} \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{i^k}{k!} \frac{\xi^{2k}}{(2\lambda)^k} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} \hat{f}(\xi)\, d\xi + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \right] \text{ quand } \lambda \to +\infty$$

$$= \sqrt{2\pi} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{i}}}_{= e^{-i\pi/4}} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-i)^k}{k!\, 2^k} \lambda^{-k-1/2} f^{(2k)}(0) + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right) \text{ quand } \lambda \to +\infty$$

avec $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i \arg(z)}{2}}$.

À savoir pour ce dév :

Principe de prolongement analytique : [Tauvel p.52]

Soit U ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $f \in H(U)$.

(i) f identiquement nulle sur U

$\Updownarrow$

(ii) f identiquement nulle sur voisinage de a

$\Updownarrow$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = 0$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) OK.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Au voisinage de a, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (z-a)^n = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit V l'ensemble des $z \in U$ tq f soit identiquement nulle au voir de z

- V non vide (par hypothèse (ii))
- V ouvert par construction de V
- V fermé :

  soit (z_n) suite de V tq $z_n \longrightarrow b \in U$.

  $f^{(k)}(z_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, or $f^{(k)}$ continue donc $f^{(k)}(b) = 0 \quad \forall k$

  Or f est DSE au voir de b, donc nulle au voir de b. $b \in V$.

$\hookrightarrow$ Ainsi $V = U$

TF de la gaussienne (réelle) :

$$\widehat{G_\alpha}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-i x \xi} \, dx$$

▶ Mq $\widehat{G_\alpha}(\xi)$ est C^1

(thm de dérivation sous $\int$)

▶ calcul $\widehat{G_\alpha}'$

$\hookrightarrow \widehat{G_\alpha}'(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} -x \, e^{-\alpha x^2} e^{-i x \xi} \, dx$

et par une IPP, $G_\alpha'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha} \widehat{G_\alpha}(\xi)$

▶ $\widehat{G_\alpha}(\xi) = \underbrace{\widehat{G_\alpha}(0)}_{\text{à calculer}} \cdot e^{-\xi^2/4\alpha}$

à calculer avec chang de var $\boxed{y = \sqrt{\alpha} \cdot x}$

Calcul intégrale de Gauss

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx$$

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \quad \text{(Fubini)}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta$$

$$= \pi$$

d'où $I = \sqrt{\pi}$

* Prouver que $z \mapsto \sqrt{\frac{??}{z}}$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)}$ avec $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + 2i \arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right)$ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.

ou définir $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\cdot e^{\frac{i \arg(z)}{2}}$.

et on utilise Cauchy Riemann en exprimant l'argument en fct de x et y.